Compito di Analisi II (primi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica Compito (A)
28-10-05

Gli studenti che sostengono il presente esame ed avranno la verbalizzazione di Analisi III, qualora debbano sostenere anche Complementi I, **non possono** portare il programma di Complementi I dello scorso anno. Per sapere quale programma portare si guardi la mia pagina web: www.mat.uniroma2.it/ perfetti e poi Ingegneria Elettronica 2005/2006.

Problema n.1

Un filo è disposto lungo il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+L) & -L \le x \le L \\ 3x - L & L < x \le 2L \end{cases}$

Per $x \le L$ la densità del filo è data da $\delta_1(x,y) = \delta_1|x|$ mentre per $x \ge L$ la densità è $\delta_2(x,y) = \delta_2 x$. Si dica che relazione intercorre fra δ_1 e δ_2 affinché sia zero la ordinata del baricentro del filo

Problema n.2

Si calcoli l'area della regione piana compresa all'interno della curva chiusa data da $\underline{r}(\vartheta) = \begin{cases} x(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2\vartheta}\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2\vartheta}\sin\vartheta \end{cases}$

$0 \le \vartheta \le 2\pi$

Facoltativo Quale è l'espressione della curva in coordinate cartesiane?

Sia ora $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$. Si calcoli $\int_{\underline{r}(\vartheta)} \omega$ dove $\omega = (2x + \cos x \arctan y)dx + \frac{\sin x}{1+y^2}dy$

Problema n.3

Calcolare l'area della porzione di cono avente equazione $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ compresa fra i piani $z = 0$ e $z = x + 4$

Problema n.4

Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = xy\underline{i} + (y + xz)\underline{j} + 2(z - zy)\underline{k}$ uscente dalla *superficie laterale* del solido racchiuso dal cilindro di equazione $4x^2 + y^2 = 4$ e i piani $z = 0$, $z = y + 1$

Problema n.5 È data la forma differenziale $\omega(x,y) = \frac{2x - 3y}{x^2+y^2}dx + \frac{3x+2y}{x^2+y^2}dy$. Si dica quanto valgono gli integrali curvilinei $\int_\gamma \omega$ dove γ, orientata in senso antiorario, è nell'ordine

$\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$, $\gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1\}$,

$\gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ \frac{(x-3)^2}{4} + y^2 = 1\}$,

Compito di Analisi II (primi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica Compito (B)
28-10-05

Gli studenti che sostengono il presente esame ed avranno la verbalizzazione di Analisi III, qualora debbano sostenere anche Complementi I, **non possono** portare il programma di Complementi I dello scorso anno. Per sapere quale programma portare si guardi la mia pagina web: www.mat.uniroma2.it/ perfetti e poi Ingegneria Elettronica 2005/2006.

Problema n.1

Un filo è disposto lungo il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+L) & -2L \le x \le L \\ 3x - L & L < x \le 2L \end{cases}$
Per $x \le L$ la densità del filo è data da $\delta_1(x,y) = \delta_1|x|$ mentre per $x \ge L$ la densità è $\delta_2(x,y) = \delta_2 x$. Si dica che relazione intercorre fra δ_1 e δ_2 affinché sia zero la ordinata del baricentro del filo

Problema n.2

Si calcoli l'area della regione piana compresa all'interno della curva chiusa data da $\underline{r}(\vartheta) = \begin{cases} x(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2\vartheta}\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2\vartheta}\sin\vartheta \end{cases}$

$0 \le \vartheta \le 2\pi$

Facoltativo Quale è l'espressione della curva in coordinate cartesiane?

Sia ora $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$. Si calcoli $\int_{\underline{r}(\vartheta)} \omega$ dove $\omega = (2x - \sin x \arctan y)dx + \frac{\cos x}{1+y^2}dy$

Problema n.3

Calcolare l'area della porzione di cono avente equazione $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ compresa fra i piani $z = 0$ e $z = x + 4$

Problema n.4

Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = xy\underline{i} + (y + xz)\underline{j} + 2(z - zy)\underline{k}$ uscente dalla *superficie laterale* del solido racchiuso dal cilindro di equazione $4x^2 + y^2 = 2$ e i piani $z = 0$, $z = 2y + 1$

Problema n.5 È data la forma differenziale $\omega(x,y) = \frac{3x-4y}{x^2+y^2}dx + \frac{4x+3y}{x^2+y^2}dy$. Si dica quanto valgono gli integrali curvilinei $\int_\gamma \omega$ dove γ, orientata in senso antiorario, è nell'ordine

$\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$, $\gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1\}$,
$\gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ \frac{(x-5)^2}{4} + y^2 = 1\}$,

Compito di Analisi II (primi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica   Compito (C)
28-10-05

Gli studenti che sostengono il presente esame ed avranno la verbalizzazione di Analisi III, qualora debbano sostenere anche Complementi I, **non possono** portare il programma di Complementi I dello scorso anno. Per sapere quale programma portare si guardi la mia pagina web: www.mat.uniroma2.it/ perfetti e poi Ingegneria Elettronica 2005/2006.

Un filo è disposto lungo il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+L) & -L \le x \le L \\ 3x - L & L < x \le 2L \end{cases}$

Per $x \le L$ la densità del filo è data da $\delta_1(x,y) = \delta_1|x|$ mentre per $x \ge L$ la densità è $\delta_2(x,y) = \delta_2 x$. Si dica che relazione intercorre fra δ_1 e δ_2 affinché sia zero la ascissa del baricentro del filo

Problema n.2

Si calcoli l'area della regione piana compresa all'interno della curva chiusa data da $\underline{r}(\vartheta) = \begin{cases} x(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2(2\vartheta)}\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2(2\vartheta)}\sin\vartheta \end{cases}$

$0 \le \vartheta \le 2\pi$

Facoltativo Quale è l'espressione della curva in coordinate cartesiane?

Sia ora $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$. Si calcoli $\int_{\underline{r}(\vartheta)} \omega$ dove $\omega = (2x + \frac{\arctan y}{1+x^2})dx + \frac{\arctan x}{1+y^2}dy$

Problema n.3

Calcolare l'area della porzione di cono avente equazione $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$ compresa fra i piani $z = 0$ e $z = 2x+4$

Problema n.4

Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = xy\underline{i} + (y + xz)\underline{j} + 2(z - zy)\underline{k}$ uscente dalla *superficie laterale* del solido racchiuso dal cilindro di equazione $4x^2 + y^2 = 9$ e i piani $z = 0$, $z = 2y + 2$

Problema n.5 È data la forma differenziale $\omega(x,y) = \frac{3x - y}{x^2+y^2}dx + \frac{x + 3y}{x^2+y^2}dy$. Si dica quanto valgono gli integrali curvilinei $\int_\gamma \omega$ dove γ, orientata in senso antiorario, è nell'ordine

$\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$, $\quad \gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1\}$,
$\gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ \frac{(x-4)^2}{4} + y^2 = 1\}$,

Compito di Analisi II (primi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica   Compito (D)
28-10-05

Gli studenti che sostengono il presente esame ed avranno la verbalizzazione di Analisi III, qualora debbano sostenere anche Complementi I, **non possono** portare il programma di Complementi I dello scorso anno. Per sapere quale programma portare si guardi la mia pagina web: www.mat.uniroma2.it/ perfetti e poi Ingegneria Elettronica 2005/2006.

Un filo è disposto lungo il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+L) & -2L \le x \le L \\ 3x - L & L < x \le 2L \end{cases}$

Per $x \le L$ la densità del filo è data da $\delta_1(x,y) = \delta_1|x|$ mentre per $x \ge L$ la densità è $\delta_2(x,y) = \delta_2 x$. Si dica che relazione intercorre fra δ_1 e δ_2 affinché sia zero la ascissa del baricentro del filo

Problema n.2

Si calcoli l'area della regione piana compresa all'interno della curva chiusa data da $\underline{r}(\vartheta) = \begin{cases} x(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2(2\vartheta)}\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2(2\vartheta)}\sin\vartheta \end{cases}$

$0 \le \vartheta \le 2\pi$

Facoltativo Quale è l'espressione della curva in coordinate cartesiane?

Sia ora $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$. Si calcoli $\int_{\underline{r}(\vartheta)} \omega$ dove $\omega = (\cos x - \sin x \sin y)dx + \cos x \cos y dy$

Problema n.3

Calcolare l'area della porzione di cono avente equazione $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$ compresa fra i piani $z = 0$ e $z = x + 4$

Problema n.4

Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = xy\underline{i} + (y + xz)\underline{j} + 2(z - zy)\underline{k}$ uscente dalla *superficie laterale* del solido racchiuso dal cilindro di equazione $x^2 + 4y^2 = 9$ e i piani $z = 0$, $z = 2y + 3$

Problema n.5 È data la forma differenziale $\omega(x,y) = \frac{3x-5y}{x^2+y^2}dx + \frac{5x+3y}{x^2+y^2}dy$. Si dica quanto valgono gli integrali curvilinei $\int_\gamma \omega$ dove γ, orientata in senso antiorario, è nell'ordine

$\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$, $\gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1\}$,

$\gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ \frac{(x+4)^2}{4} + y^2 = 1\}$,

Soluzioni

Primo esercizio

Compito A L'ordinata del baricentro è data dal numeratore del seguente rapporto
$\frac{1}{m_1+m_2}(\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-L}^{L}\frac{1}{2}(t+L)|t|dt+\delta_2\sqrt{10}\int_{L}^{2L}t(3t+L)dt$ ossia $\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-L}^{0}\frac{1}{2}(t+L)(-t)+\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\int_{0}^{L}\frac{1}{2}(t+L)tdt+\delta_2\sqrt{10}\int_{L}^{2L}t(3t+L)dt=\frac{\sqrt{5}}{4}\delta_1+\frac{11}{2}\sqrt{10}\delta_2$ e non è mai nulla.

Compito B L'ordinata del baricentro è data dal numeratore di

$$\frac{1}{m_1+m_2}(\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-2L}^{L}\frac{1}{2}(t+L)|t|dt+\delta_2\sqrt{10}\int_{L}^{2L}t(3t+L)dt=$$

$$=\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-2L}^{0}\frac{1}{2}(t+L)(-t)+\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\int_{0}^{L}\frac{1}{2}(t+L)tdt+$$

$+\delta_2\sqrt{10}\int_{L}^{2L}t(3t+L)dt=\frac{\sqrt{5}}{24}\delta_1+\frac{11}{2}\sqrt{10}\delta_2$ e non è mai nulla.

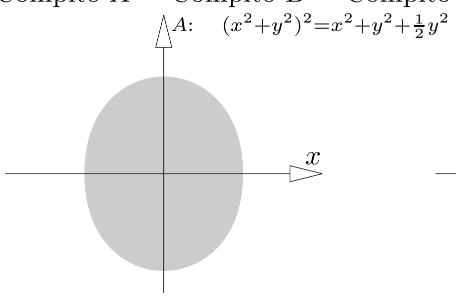
Compito C L'ascissa del baricentro è data dal numeratore del seguente rapporto
$\frac{1}{m_1+m_2}(\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-L}^{L}t|t|dt+\delta_2\sqrt{10}\int_{L}^{2L}t^2dt)$ ed è zero quando
$\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-L}^{L}t|t|dt+\delta_2\sqrt{10}\int_{L}^{2L}t^2dt=\delta_2\sqrt{10}\int_{L}^{2L}t^2dt=\frac{7}{3}\sqrt{10}\delta_2L^3=0$ il che è impossibile.

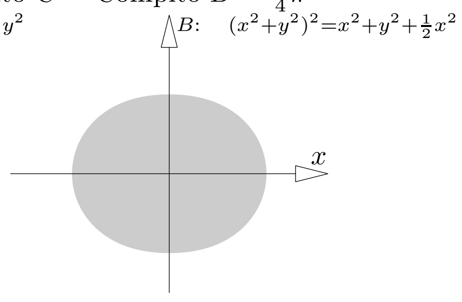
Compito D L'ascissa del baricentro è data dal numeratore di
$\frac{1}{m_1+m_2}(\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-2L}^{L}t|t|dt+\delta_2\sqrt{10}\int_{L}^{2L}t^2dt)$ ed esso è zero quando
$\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}(\int_{-2L}^{0}(-t^2)dt+\int_{0}^{L}t^2dt)+\delta_2\sqrt{10}\int_{L}^{2L}t^2dt=-\delta_1\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{7}{3}L^3+\frac{\sqrt{10}}{3}7\delta_2L^3=0$ e quindi $\delta_1=2\sqrt{2}\delta_2$.

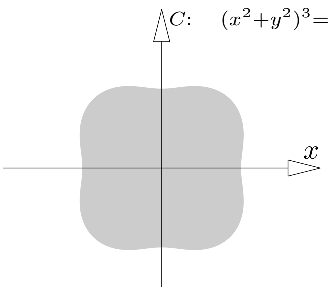
Secondo Esercizio– Prima domanda

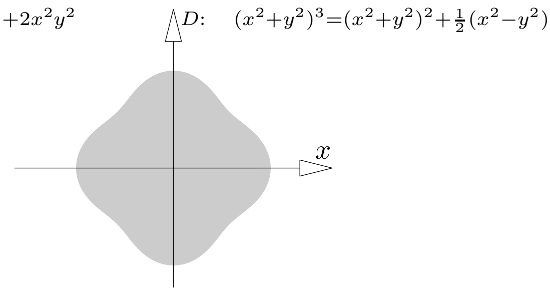
Quando si ha una curva chiusa descritta dalla parametrizzazione $\underline{r}(\theta)=\begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\ y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$ l'area racchiusa dalla curva è data da $\frac{1}{2}\int_{\partial^+D}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta(f'\sin\theta+f\cos\theta)f\cos\theta-(f'\cos\theta-f\sin\theta)f\sin\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}f^2(\theta)$ per cui si ha

Compito A = Compito B = Compito C = Compito D = $\frac{5}{4}\pi$









Secondo Esercizio– Seconda domanda

Bisognava verificare che le forme differenziali erano chiuse. Essendo le forme ovunque definite sono esatte e quindi si potevano adottare due procedure.
La prima era quella di trovare il potenziale. La seconda procedura era quella di calcolare l'integrale lungo un cammino fatto di due pezzi in caiscuno dei quali una delle coordinate rimane costante.

Compito A. Il potenziale è $x^2+\sin x \arctan y$, il punto finale è $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ e il punto iniziale è $(1,0)$. L'integrale è -1

Compito B. Il potenziale è $x^2+\cos x \arctan y$, il punto finale è $(0,1)$ e il punto iniziale è $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$. L'integrale è $\frac{\pi-6}{4}$

Compito C. Il potenziale è $x^2+\arctan x \arctan y$, il punto finale è $(0,1)$ e il punto iniziale è $(1,0)$. L'integrale è -1

Compito D. Il potenziale è $\sin x+\cos x \sin y$, il punto finale è $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ e il punto iniziale è $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$. L'integrale è $\sin\sqrt{\frac{3}{2}}-\sin\sqrt{\frac{3}{2}}=0$

Terzo Esercizio
Si deve intersecare il cono $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ con il piano $z=bx+c$ e viene fuori $x^2(a^2-b^2)-2bcx+a^2y^2=c^2$. Detto $P\overset{\text{def}}{=}a^2-b^2$ si ha $\frac{(x-\frac{bc}{P})^2}{(\frac{ca}{P})^2}+\frac{y^2}{(\frac{c}{\sqrt{P}})^2}=1$. Il risultato è $\int\int_{\frac{(x-\frac{bc}{P})^2}{(\frac{ca}{P})^2}+\frac{y^2}{(\frac{c}{\sqrt{P}})^2}\le 1} d\sigma$. Per avere $d\sigma$ dobbiamo parametrizzare il cono e scegliamo coordinate cartesiane ossia $x=u$, $y=v$, $z=a\sqrt{u^2+v^2}$; $d\sigma=\|\underline{n}_e\|=\sqrt{1+a^2}$ per cui l'integrale è $\sqrt{1+a^2}$ volte l'area dell'ellisse trovata ossia $\pi\frac{c^2a\sqrt{1+a^2}}{(a^2-b^2)^{3/2}}$ I risultati sono: per A e B $\pi\frac{16}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$; per C $\pi\frac{48}{5}\sqrt{2}$ e per D si ha $3\pi\sqrt{5}$

Quarto Esercizio
Eseguiamo il calcolo del flusso. Sia Sia $S=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon ax^2+by^2\le c, \quad z=0\}$, e $S_2=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon ax^2+by^2=c, \quad 0\le z\le dy+e\}$. Il flusso è quello attraverso il cono di equazione $ax^2+by^2=c$ nella parte compresa fra il piano $z=0$ e $z=dy+e$. Parametrizzaimo il cono secondo la solita parametrizzazione $x=cost$, $y=2\sin t$, $z=u$. Il vettore ortogonale esterno è $\underline{v}=2\cos t\underline{i}+\sin t\underline{j}$ per cui l'integrale è $\int_0^{2\pi}dt\int_0^{dy+e}du\big((xy)2\cos t+(y+xz)\sin t\big)$ dove al posto di x, y e z ci va sostituita la parametrizzazione. Alla fine il risultato è A: 4π, B: 2π, C: $\frac{117}{4}\pi$, D: $\frac{197}{16}\pi$

Quinto Esercizio
In tutti i casi la forma differenziale poteva scvriversi come $\omega_1+\omega_2$ dove $\omega_1=a\frac{x}{x^2+y^2}dx+a\frac{y}{x^2+y^2}dy$ e $\omega_2=b\frac{-y}{x^2+y^2}dx+b\frac{x}{x^2+y^2}dy$. Sono entrambe chiuse ma la prima è esatta e la seconda no. Infatti la prima

ammette il potenziale $a\ln(x^2+y^2)$ mentre la seconda no. $\int_{\gamma_i}\omega_1 = 0$ per $i = 1,,2,3$. $\int_{\gamma_1}\omega_2 = 2\pi b$ (si calcola). $\int_{\gamma_2}\omega_2 = 2\pi b$ in quanto la forma è chiusa e la seconda curva circonda l'origine. $\int_{\gamma_3}\omega_2 = 0$ in quanto la curva giace, insieme con la sua parte interna, in un sottoinsieme semplicemente connesso del dominio di ω_2 (non circonda l'origine).